I. جذر مربع عدد موجب :

$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$

$3 < 3{,}31 < 3{,}74 < 4$

مربعات كاملة	
a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144

تعريف

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً, العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى الجذر المربع للعدد a ويرمز له ب $\sqrt{a}$ ويقرأ جذر مربع a بحيث :

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

ملاحظات :

- $\sqrt{a}$ تكون لها معنى إذا كان a عدد حقيقي[1] موجب.
- نقول أن b بحيث $b \geq 0$ هو جذر مربع للعدد a إذا كان $b^2 = a$ مثال : 6 هو جذر مربع للعدد 36 لأن $6^2 = 36$ و لدينا $(-6)^2 = 36$ إلا أن -6 ليست جذر مربع ل 36 لأنها سالبة.
- إذا كان $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ فإن $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2$ وبالتالي $a = b$
- $\sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$ مثال $\sqrt{81} = (81)^{\frac{1}{2}} = (81)^{0,5} = 9$

أمثلة :

$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{0} = 0$

$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$

$\sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{5}{10}$

$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{9} = 3$

$-\sqrt{0{,}49} = -\sqrt{0{,}7^2} = -0{,}7$

$\sqrt{1{,}44} = \sqrt{1{,}2^2} = 1{,}2$

$\frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{\sqrt{9^2}} = \frac{1}{9}$

$\frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{\sqrt{5^2}}{3} = \frac{5}{3}$

انتبه :

- ✓ $\sqrt{-5}$ لا معنى لها لأن مابداخل الجذر يجب أن يكون موجباً.
- ✓ $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{7^2} = 7$ لأن الأس زوجي وبالتالي $(-7)^2 = -7 \times -7 = 49 = 7^2$
- ✓ $\left(-\sqrt{7}\right)^2 = -\sqrt{7} \times -\sqrt{7} = \sqrt{7}^2 = 7$ و $-\sqrt{7}^2 = -7$
- ✓ $\sqrt{3}^8 = \sqrt{3}^{2\times 4} = \left(\sqrt{3}^2\right)^4 = 3^4 = 81$ لتخلص من الجذر نقسم الأس على 2
- ✓ $\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 2^2 \times \sqrt{5}^2 = 4 \times 5 = 20$ و $\sqrt{4 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

II. العمليات على الجذور المربعة :

خاصية 1

a و b و c أعداد حقيقية موجبة : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

$$\sqrt{a\times b\times c\times d}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}\times\sqrt{d}$$

أمثلة :

$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{15}$

$\sqrt{9\times 4}=\sqrt{9}\times\sqrt{4}=3\times 2=6$

$\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{12\times 3}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times 3\times 6}=\sqrt{36}=6$

$\sqrt{900}=\sqrt{9\times 100}=\sqrt{9}\times\sqrt{100}=3\times 10=30$

$\sqrt{4900}=\sqrt{49\times 100}=\sqrt{49}\times\sqrt{100}=7\times 10=70$

خاصية 2

a و b عددان حقيقيان موجبان : $\sqrt{a^2\times b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

أمثلة :

$-\sqrt{45}=-\sqrt{9\times 5}=-\sqrt{9}\times\sqrt{5}=-3\sqrt{5}$

$\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{5^2\times 2}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$3\sqrt{20}=3\sqrt{4\times 5}=3\sqrt{4}\times\sqrt{5}=3\times 2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

$\sqrt{5^2\times 2^2\times 3}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=5\times 2\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

$\sqrt{180}=\sqrt{9\times 2\times 2\times 5}=\sqrt{9\times 4\times 5}$

$=\sqrt{9}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

انتبه :

$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$\sqrt{a\times b}\neq\sqrt{a\times b}$

$\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{7}=\sqrt{3}^4-\sqrt{7}=\left(\sqrt{3}^2\right)^2-\sqrt{7}=3^2-\sqrt{7}=9-\sqrt{7}$

$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{7}=4\sqrt{3}-\sqrt{7}$; $\sqrt{5}\times 2\times\sqrt{3}=2\sqrt{5\times 3}=2\sqrt{15}$

$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=2\sqrt{3}+\sqrt{5}$; $\sqrt{25}+\sqrt{9}=\cancel{\sqrt{25+9}}=5+3=8$

$\sqrt{9+16}=\cancel{\sqrt{9}+\sqrt{16}}=\sqrt{25}=5$

$\sqrt{7}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{14}-\sqrt{36}=\sqrt{14}-6$

خاصية 3

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

أمثلة :

$$\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{12}{3}} = -\sqrt{\frac{4\times\cancel{3}}{\cancel{3}}} = -\sqrt{4} = -2$$

$$2\sqrt{\frac{5}{4}} = 2\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \cancel{2}\times\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{5\times 11}{5\times 9}} = \sqrt{\frac{11}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{500}{35}} = \sqrt{\frac{5\times 100}{5\times 7}} = \sqrt{\frac{100}{7}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}}$$

III. حذف الجذر من المقام :

1. المقام لايحتوي على مجموع أو فرق :

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

أمثلة :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{-5}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{-5\sqrt{5}}{5} = -\sqrt{5}$$

$$\frac{-2}{5\sqrt{3}} = \frac{-2}{5\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{15}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3\times 5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{5}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\times 5} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{20}$$

2. المقام يحتوي على مجموع أو فرق :

مفهوم المرافق :

مرافق $a+b$ هو $a-b$

مرافق $a-b$ هو $a+b$

مرافق $-a+b$ هو $-a-b$

مرافق $-a-b$ هو $-a+b$

أمثلة :

العدد a	مرافقه b	الجداء $a \times b$
$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2-\sqrt{3}^2 = 4-3 = 1$
$5-\sqrt{5}$	$5+\sqrt{5}$	$(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5}) = 5^2-\sqrt{5}^2 = 25-5 = 20$
$-3+\sqrt{2}$	$-3-\sqrt{2}$	$(-3+\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}) = (-3)^2-\sqrt{2}^2 = 9-2 = 7$
$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$	$(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = \sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2 = 5-2 = 3$
$-2\sqrt{3}+4$	$-2\sqrt{3}-4$	$(-2\sqrt{3}+4)(-2\sqrt{3}-4) = (-2\sqrt{3})^2-4^2 = 12-16 = -4$

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعاً و c عدد حقيقي :

$$\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

أمثلة :

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}$$

المتطابقة رقم3

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}\times(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{7-6}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{6})$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2} = \sqrt{7}+\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{2^2-5^2} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{4-25} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}{-21}$$

IV. حل المعادلة $x^2 = a$ في IR :

الحالة 1 : $x^2 = a$ بحيث $a = 0$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$

- حل في IR المعادلة : $2(x^2+3)=6$

$$2(x^2+3)=6 \Leftrightarrow x^2+3=\frac{6}{2} \Leftrightarrow x^2+3=3$$

$$x^2=3-3 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

ذن المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو 0

الحالة 2 : $x^2 = a$ بحيث $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

- حل في IR المعادلة : $x^2=9$

$$x^2=9 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-3^2=0$$

$$(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \text{ أو } x+3=0$$

$x=3$ أو $x=-3$

إذن المعادلة تقبل حلين هما 3 و -3

- حل في IR المعادلة : $2x^2=10$

$$2x^2=10 \Leftrightarrow x^2=\frac{10}{2} \Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x^2-5=0$$

$$x^2-\sqrt{5}^2=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$$

$$x-\sqrt{5}=0 \text{ أو } x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{5} \text{ أو } x=-\sqrt{5}$$

إذن المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

الحالة 3 : $x^2 = a$ بحيث $a < 0$ المعادلة لا تقبل حل .

- حل في IR المعادلة : $x^2+12=2$

$$x^2+12=2 \Leftrightarrow x^2=2-12 \Leftrightarrow x^2=-10$$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون دائماً موجباً أو منعدماً $x^2 \geq 0$